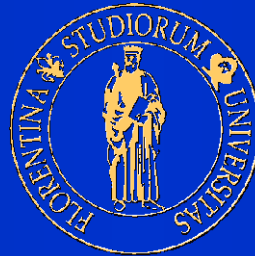


*“Progetto delle costruzioni in legno ai sensi del  
D.M. 14.01.2008 ed Eurocodice 5”*



**Solai misti legno-calcestruzzo  
Parte I**

Prato 31/10/2012

**Relatore:** Prof.Ing. Enrico Mangoni

***Docente di Progetto di Strutture presso la Facoltà  
d'Ingegneria dell'Università di Firenze***

***emangoni@dicea.unifi.it, ing.enrico@studiomangoni.it***

# Cosa si intende per strutture composte?

- Sono strutture costituite da più parti di materiale analogo o diverso, meccanicamente collegate in modo efficiente o no.
- Trave composta realizzata con trave di legno rinforzata all'estradosso con putrella metallica, senza collegamento tra le due.

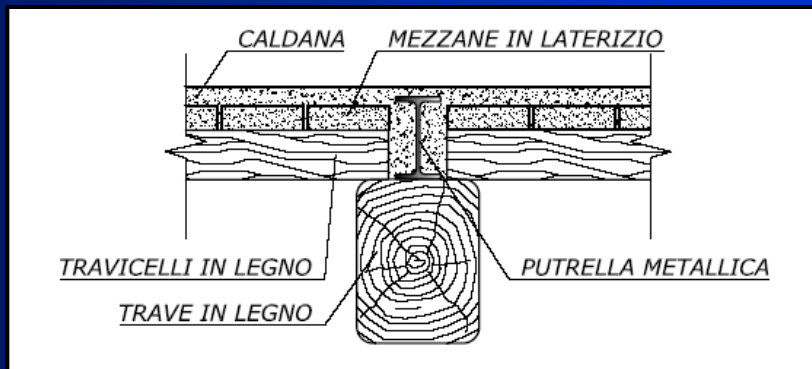
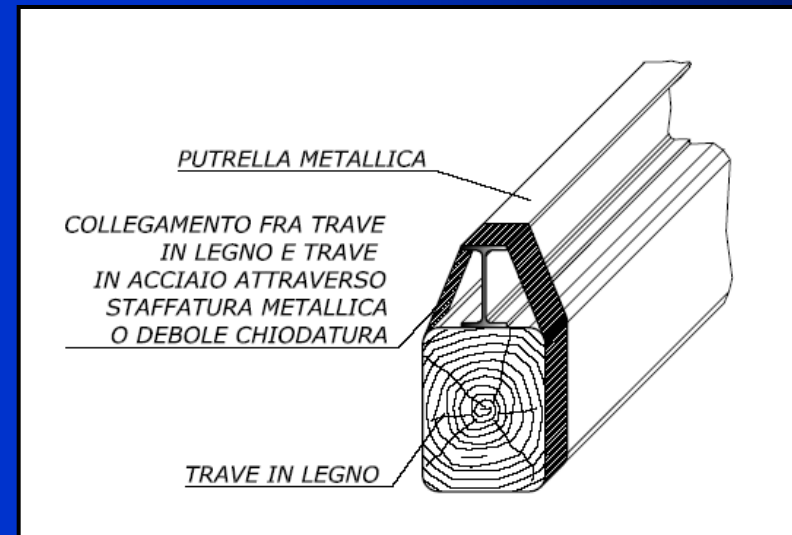


Figura 1



- Trave composta realizzata con travi di dimensioni diverse sovrapposte e collegate fra loro attraverso staffatura metallica



Figura 2 (Ferrara, loggia Palazzo Comunale)

- Travi realizzate con parti sovrapposte con “indentatura” e perni metallici verticali passanti



Figura 3 (Ferrara, atrio Palazzo dei Diamanti)

- Trave in legno rinforzata all'estradosso con soletta in calcestruzzo armato collaborante

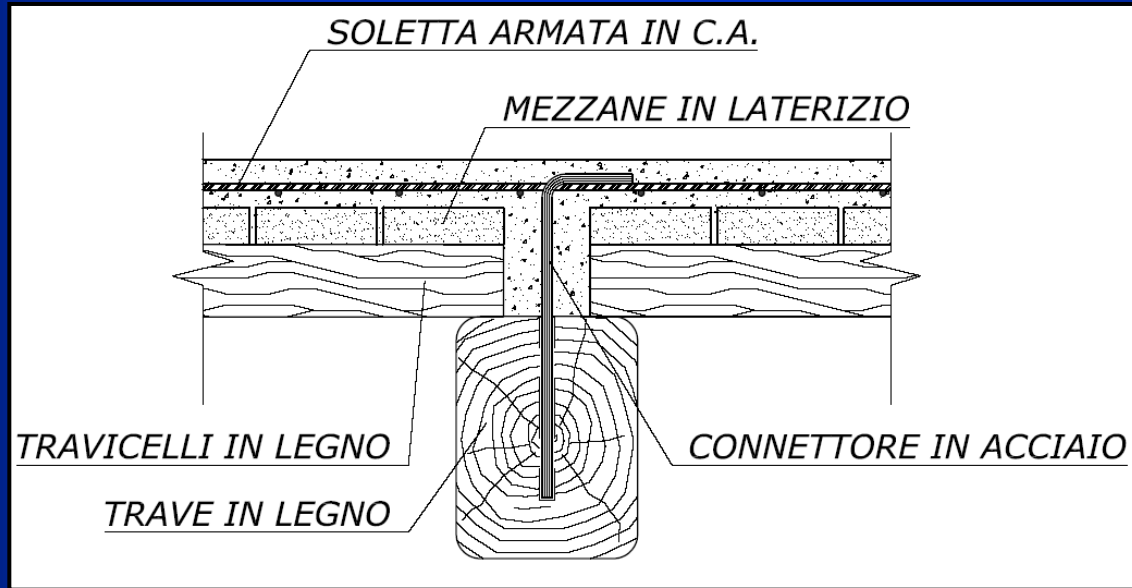
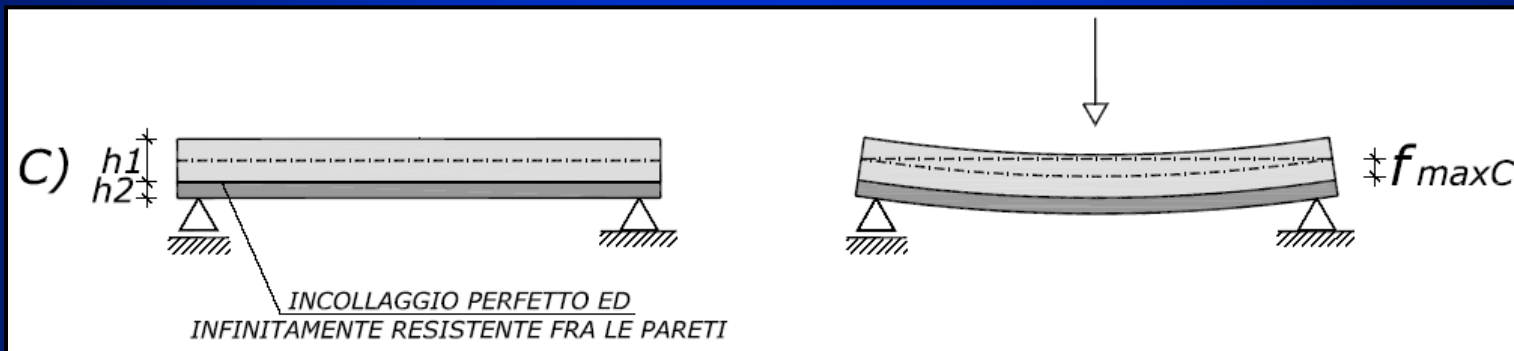
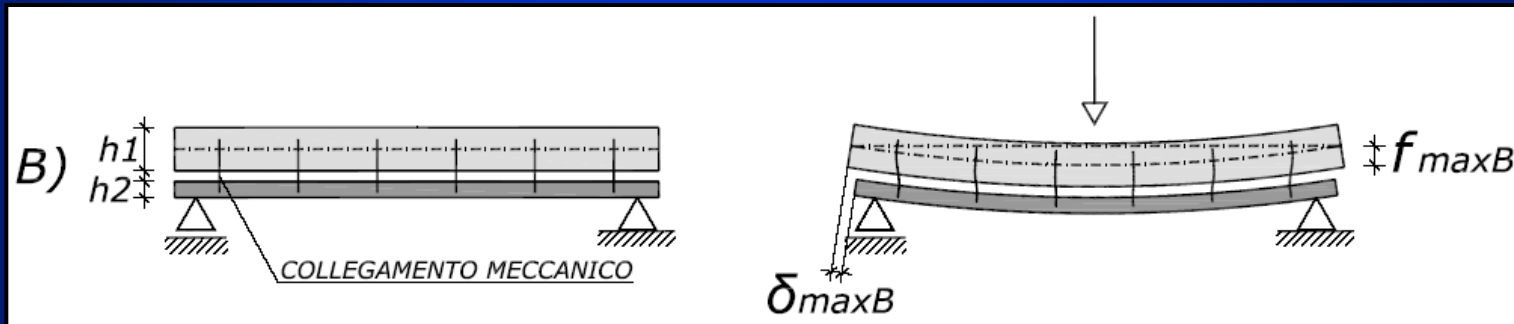
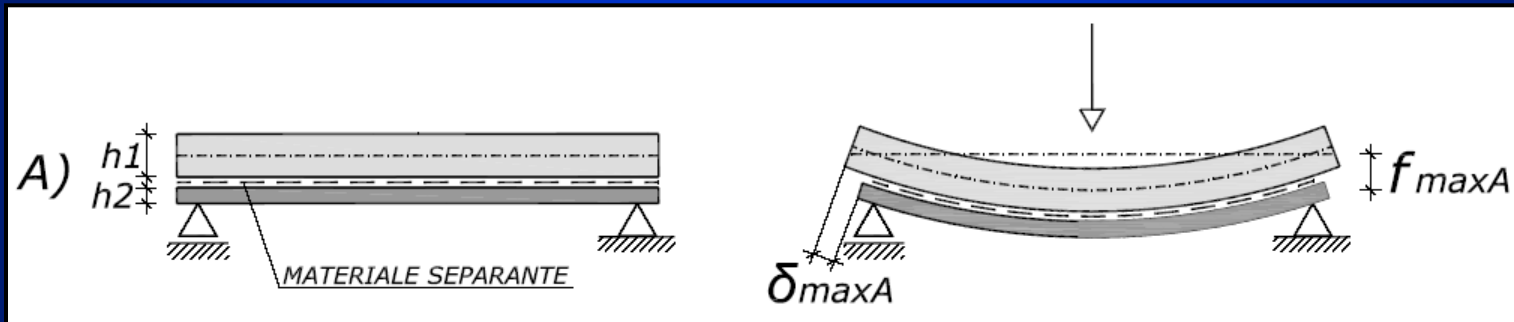


Figura 4

# Cosa vuol dire collegamento meccanicamente efficace?



$$f_{maxC} < f_{maxB} < f_{maxA}$$

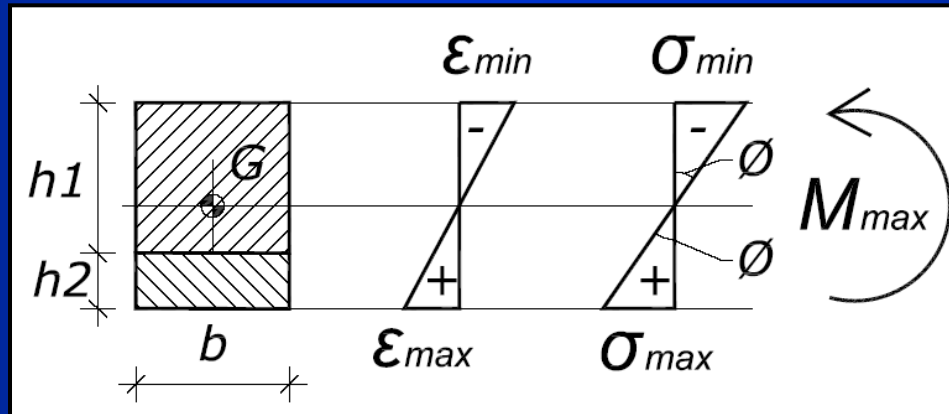
(N.B.  $f_{maxC} = (f_{maxA}/4)$  se  $h_1 = h_2 = h$ )

$$\bar{\delta}_{\max C} = 0 < \bar{\delta}_{\max B} < \bar{\delta}_{\max A}$$

Un collegamento meccanicamente efficace è quello che si oppone in modo “*ingegneristicamente*” apprezzabile al libero scorrimento fra le parti

# Come si risolve staticamente una trave composta?

Il caso più semplice è il caso C)  $E_1=E_2=E$



$$Y_G = \frac{\frac{h_1^2}{2} + (h_1 + \frac{h_2}{2})h_2}{(h_1 + h_2)}$$

$$J_{\text{tot}} = \frac{bh_1^3}{12} + \frac{bh_2^3}{12} + \left(Y_G - \frac{h_1}{2}\right)^2 bh_1 + \left(h_1 + \frac{h_2}{2} - Y_G\right)^2 bh_2$$

$$\sigma_{\text{max}} = + \frac{M_{\text{max}}}{J_{\text{tot}}} (h_1 + h_2 - Y_G)$$

$$\sigma_{\text{min}} = - \frac{M_{\text{max}}}{J_{\text{tot}}} (Y_G)$$

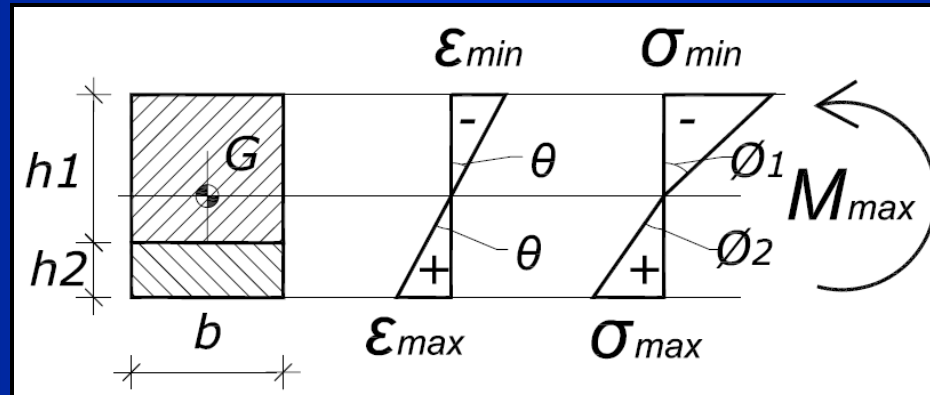
$$\varepsilon_{\text{min}} = \frac{\sigma_{\text{min}}}{E}$$

$$\varepsilon_{\text{max}} = \frac{\sigma_{\text{max}}}{E}$$



# Se le due parti sono di materiali diversi

Sia  $n^* = E_1/E_2$



$$Y_G^* = \frac{\frac{n^* h_1^2}{2} + (h_1 + \frac{h_2}{2}) h_2}{(n^* h_1 + h_2)}$$

$$J_{tot}^* = n^* \frac{b h_1^3}{12} + \frac{b h_2^3}{12} + n^* \left( Y_G - \frac{h_1}{2} \right)^2 b h_1 + \left( h_1 + \frac{h_2}{2} - Y_G \right)^2 b h_2$$

$$\sigma_{max}^* = +n^* \frac{M_{max}}{J_{tot}^*} (h_1 + h_2 - Y_G)$$

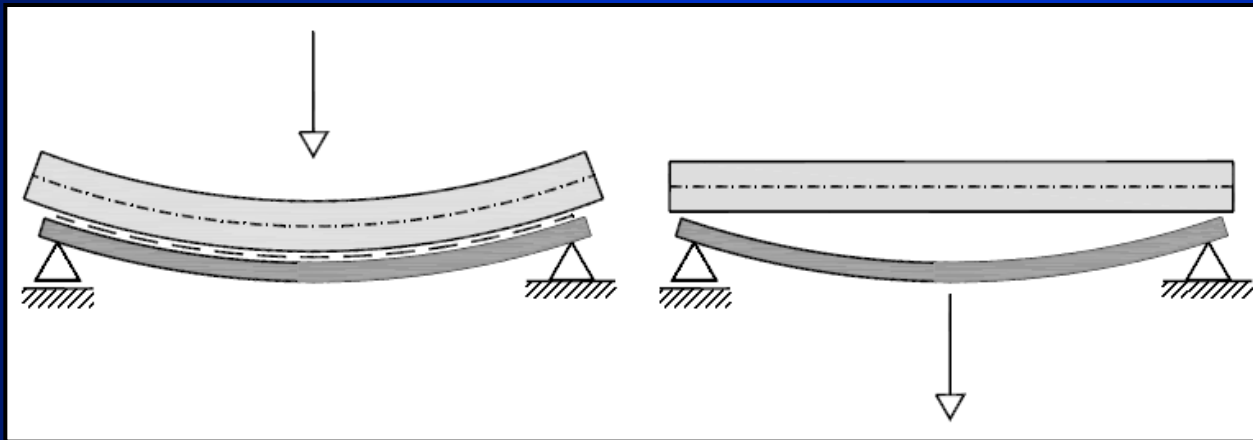
$$\sigma_{min}^* = -\frac{M_{max}}{J_{tot}^*} (Y_G)$$

$$\varepsilon_{min}^* = \frac{\sigma_{min}^*}{E_1}$$

$$\varepsilon_{max}^* = \frac{\sigma_{max}^*}{E_2}$$

Il caso A) è ugualmente abbastanza semplice

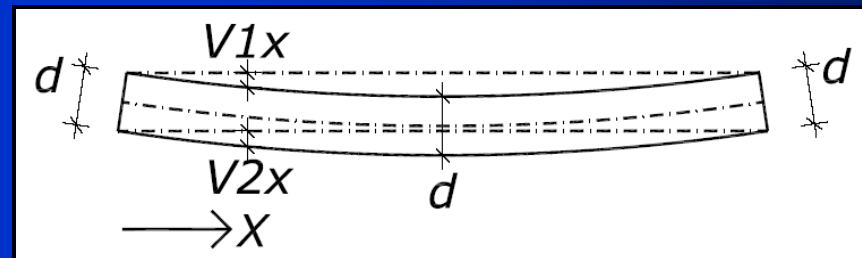
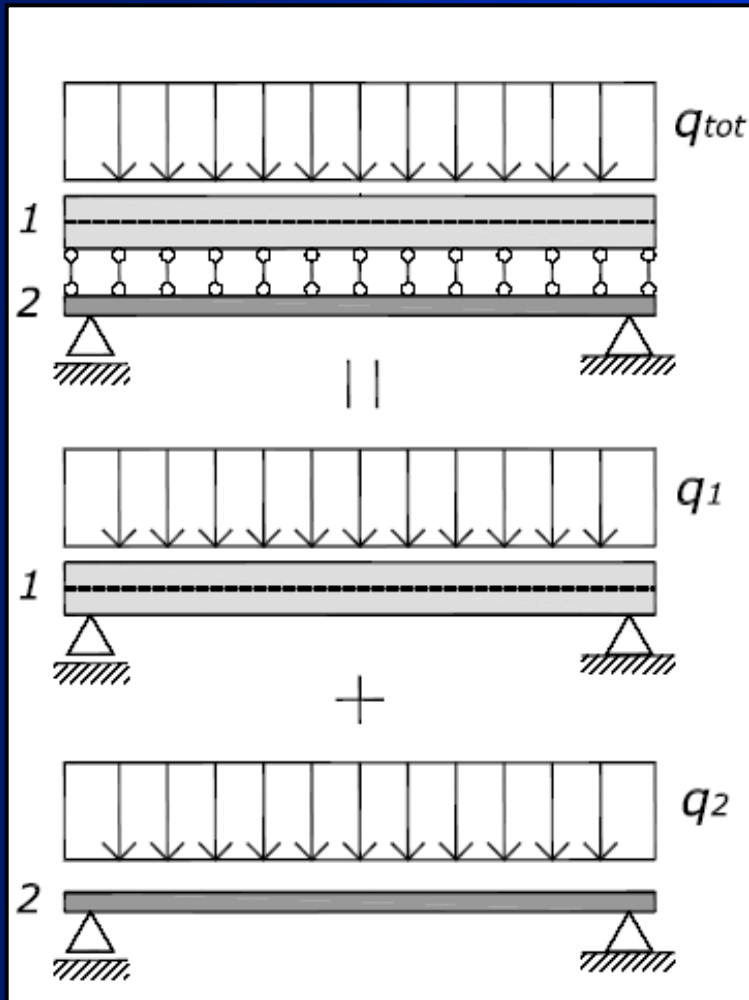
Facciamo l'ipotesi che fra le due parti non si abbiano spostamenti verticali relativi



N.B. Con l'ipotesi precedente si evitano casi come quelli della figura di destra. In questo caso la parte superiore non viene sollecitata a parte il peso proprio

Il caso A) è ugualmente abbastanza semplice

Facciamo l'ipotesi che fra le due parti non si abbiano spostamenti verticali relativi



$$V1(x) = V2(x)$$

Equilibrio:  $q1 + q2 = q$

Congruenza:

$$\frac{v_1''(x)}{E_1 J_1} = \frac{v_2''(x)}{E_2 J_2} = \frac{v''(x)}{E J_{tot}}$$

$$E J_{tot} = E_1 J_1 + E_2 J_2$$

Poiché il momento flettente è proporzionale al carico risulta:

$$\frac{\alpha q_1}{E_1 J_1} = \frac{\alpha q_{\text{tot}}}{E J_{\text{tot}}} = \frac{\alpha q_2}{E_2 J_2}$$

N.B.  $\alpha$  dipende dal carico.  
Per carico uniforme

$$\alpha = \frac{l^2}{8}$$

$$q_i = \frac{q_{\text{tot}}}{E J_{\text{tot}}} E_i J_i$$

N.B. se  $E_1 J_1 = E_2 J_2$   $q_1 = q_2 = q/2$

Rinforzare una trave in legno sovrapponendogli elementi di buona rigidezza flessionale non è efficace. (P.s. soletta sottile in C.A. semplicemente sovrapposta alla trave)

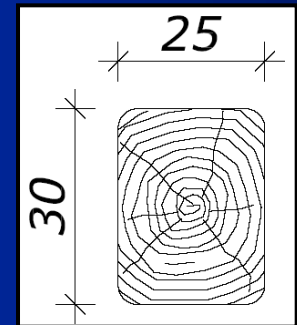
$$\frac{E_c J_c}{E_1 J_1} \cong 3 \left( \frac{b_c h_c^3}{12} \right) \frac{12}{b_1 h_1^3}$$

$$\frac{h_c}{h_1} \cong 0,16$$

$$\frac{b_c}{b_1} \cong 2,5$$

$$\cong 3 * (2,5) * 4 * 10^{-3} \cong 0,03 = 3\%$$

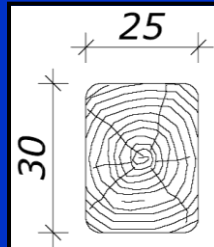
Considerando una trave in legno 25x30 cm  
con  $E_c=90000 \text{ kg/cm}^2$



Non è difficile trovare che detto  $q_{tot}$  il carico complessivo  
sulla trave:

1)  $q_a = q_{tot}/2$  (metà carico portato dal profilo in acciaio)

$$J_a \geq 0,04 J_l$$



IPE 220  
HE 160B

2)  $q_a = q_{tot} 9/10$  (trave in legno scarica)

$$J_a \geq 0,4 J_l$$



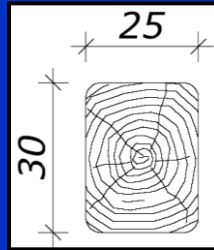
IPE 400  
HE 300B

Le considerazioni precedenti valgono trascurando i fenomeni viscosi del legno. Considerandole e ponendo mediamente  $E_{\text{linf.}} = E_{10}/1.6$

Risulta:

1)  $q_a = q_{\text{tot}}/2$  (metà carico portato dal profilo in acciaio)

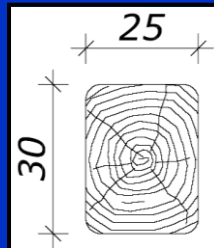
$$J_a \geq 0,025 J_l$$



IPE 200  
HE 140B

2)  $q_a = q_{\text{tot}} 9/10$  (trave in legno scarica)

$$J_a \geq 0,25 J_l$$



IPE 360  
HE 260B

-A causa degli spazi disponibili sopra alle travi in legno con i normali pacchetti di solaio l'intervento di sovrapposizione di un profilo in acciaio ad una trave in legno non riesce a scaricare completamente la trave. Si riesce abbastanza facilmente però ad arrivare ad un carico nella trave in legno pari alla metà di quello complessivo.

-I connettori verticali sono sollecitati a compressione per carichi applicati nella trave superiore, a trazione invece, per carichi applicati alla trave inferiore. E' semplice dimostrare che indicato con "J" la parte di trave non direttamente caricata, il carico sui connettori vale:

$$T = \left( \frac{E_j J_j}{E J_{tot}} \right) q_{tot} i$$

Con  $i$  = interasse fra i connettori

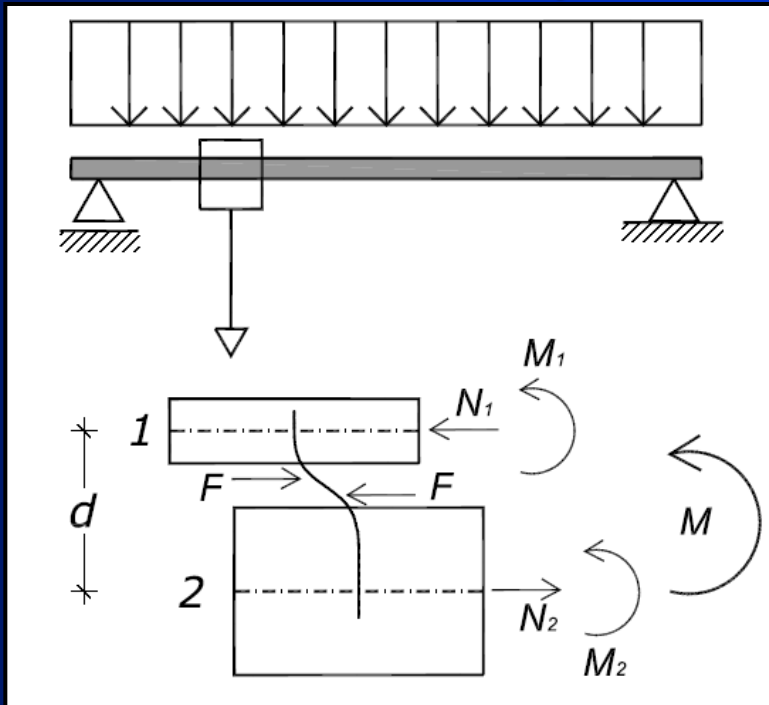
Il caso B) è il più complesso, ma nel caso delle costruzioni composte in legno forze il più frequente.

Per equilibrio:

$$N_1 = N_2 = N$$

$$M_{1B} + M_{2B} - Nd = M$$

$$M_{iB} = \frac{M_{tot} - N_{max} d}{EJ_{tot}} E_i J_i$$

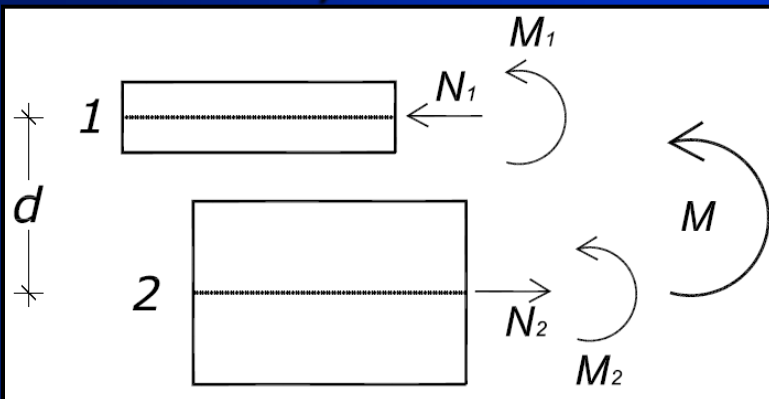


Nel caso A) avevamo invece:

$$N_1 = N_2 = 0$$

$$M_{1A} + M_{2A} = M$$

$$M_{iA} = \frac{E_i J_i}{EJ_{tot}} M$$





-E' immediato rendersi conto che nel caso B) nella trave nasce una nuova sollecitazione rispetto al caso A), lo sforzo normale.

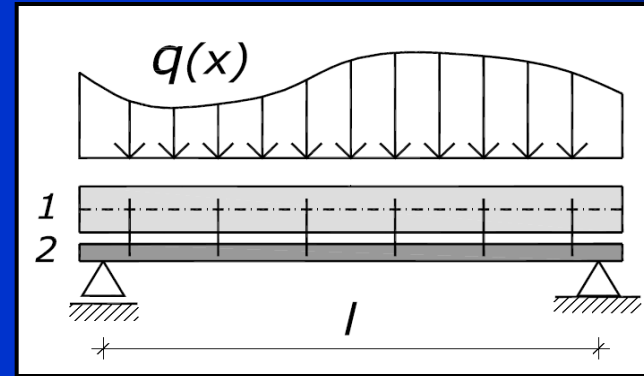
-La struttura è meno impegnata flessionalmente rispetto al caso A) quindi il materiale lavora meglio

-La struttura B) è più rigida rispetto al caso A). Si hanno curvature minori, le rigidezze estensionali sono più elevate di quelle flessionali.

-Il problema è internamente iperstatico anche se esternamente isostatico .  
(N incognito)

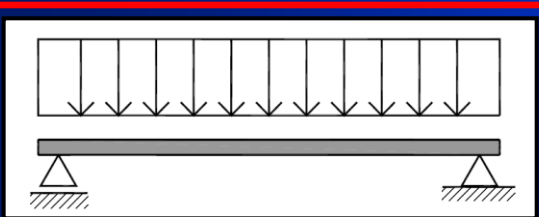
In *Mangoni* "Nuovi sviluppi nel calcolo delle travi composte legno-calcestruzzo" (Bollettino Ingegneri n°7/8 2000) utilizzando un'applicazione della serie di Fourier al calcolo strutturale, si dimostra che posto:

$$q(x) = \sum_{n=1}^{\infty} q_n \sin \alpha_n (x)$$

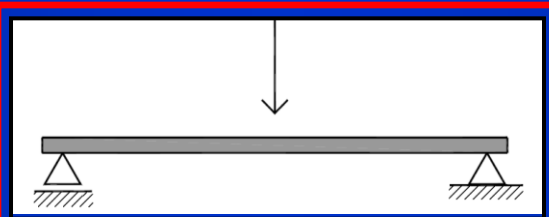


$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_{n.i.} \cos \alpha_n (x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q_n \frac{d}{EJ_{tot}} i}{\frac{n\pi}{l} \left[ \frac{1}{E_1 A_1} + \frac{1}{E_1 A_1} + \frac{d^2}{EJ_{tot}} + \left( \frac{n\pi}{l} \right)^2 \frac{1}{K} \right]} \cos \alpha_n (x)$$

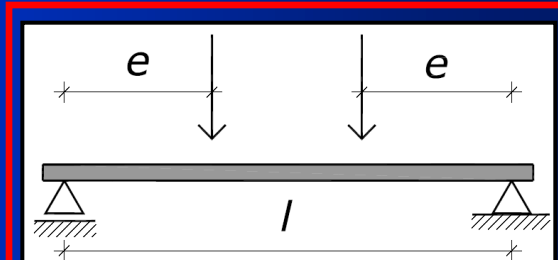
$$N(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n}{\alpha_n} \sin \alpha_n (x)$$



$$q_n = \frac{4q}{n\pi}$$

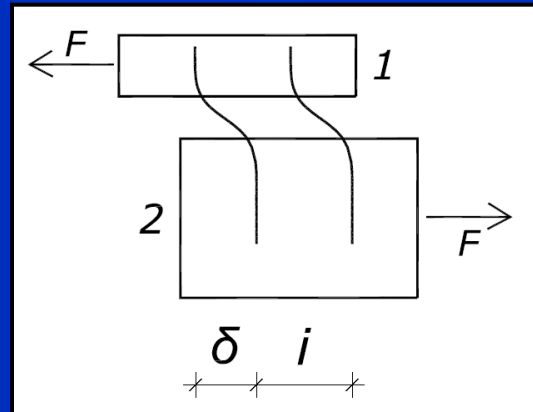


$$q_n = \frac{2P}{l} \sin\left(\frac{\alpha_n l}{2}\right)$$



$$q_n = \frac{4P}{l} \sin\left(\frac{\alpha_n e}{2}\right)$$

**K è la rigidezza specifica della connessione**



Come si vede dalla figura precedente, se le due parti 1 e 2 sono sollecitate a scorrere l'una rispetto all'altra da una forza  $F$ , sia  $\delta$  lo scorrimento relativo ottenuto. Si definisce:

$$K = \frac{F}{\delta i}$$

Per carico uniforme si ottiene una buona approssimazione anche con il solo primo termine delle serie.

Per  $x=0$ :

$$f_{\max} \cong \frac{\frac{4qdl}{EJ_{\text{tot}}}}{\pi^2 \left( \frac{1}{E_1 A_1} + \frac{1}{E_1 A_1} + \frac{d^2}{EJ_{\text{tot}}} + \frac{\pi^2}{\ell^2 K} \right)}$$

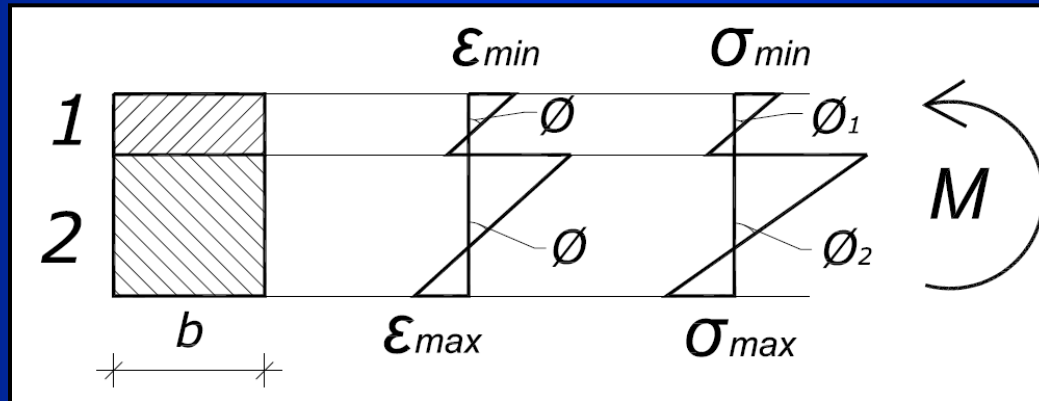
E quindi nel connettore più sollecitato abbiamo:

$$F_{\max} \cong f_{\max} i$$

Per  $x=l/2$

$$N_{\max} \cong \frac{f_{\max} l}{\pi}$$

Nota lo sforzo normale, ed il momento flettente in mezzzeria la verifica di resistenza risulta immediata.



$$\sigma_{min 1} = -\frac{M_{max}}{J_1} \frac{h_1}{2} - \frac{N_{max}}{b_1 h_1}$$

$$\sigma_{min 2} = -\frac{M_{max}}{J_2} \frac{h_2}{2} - \frac{N_{max}}{b_2 h_2}$$

$$\sigma_{max 2} = +\frac{M_{max}}{J_2} \frac{h_2}{2} - \frac{N_{max}}{b_2 h_2}$$

$$\sigma_{max 1} = +\frac{M_{max}}{J_1} \frac{h_1}{2} - \frac{N_{max}}{b_1 h_1}$$

Il problema viene affrontato anche in EC5, dove in sostanza si calcola la trave composta, utilizzando le stesse relazioni valide per le travi, utilizzando un momento d'inerzia ridotto  $J_{\text{eff}}$  rispetto a quello della trave integra per tener conto della deformabilità della connessione.

### Ipotesi di base

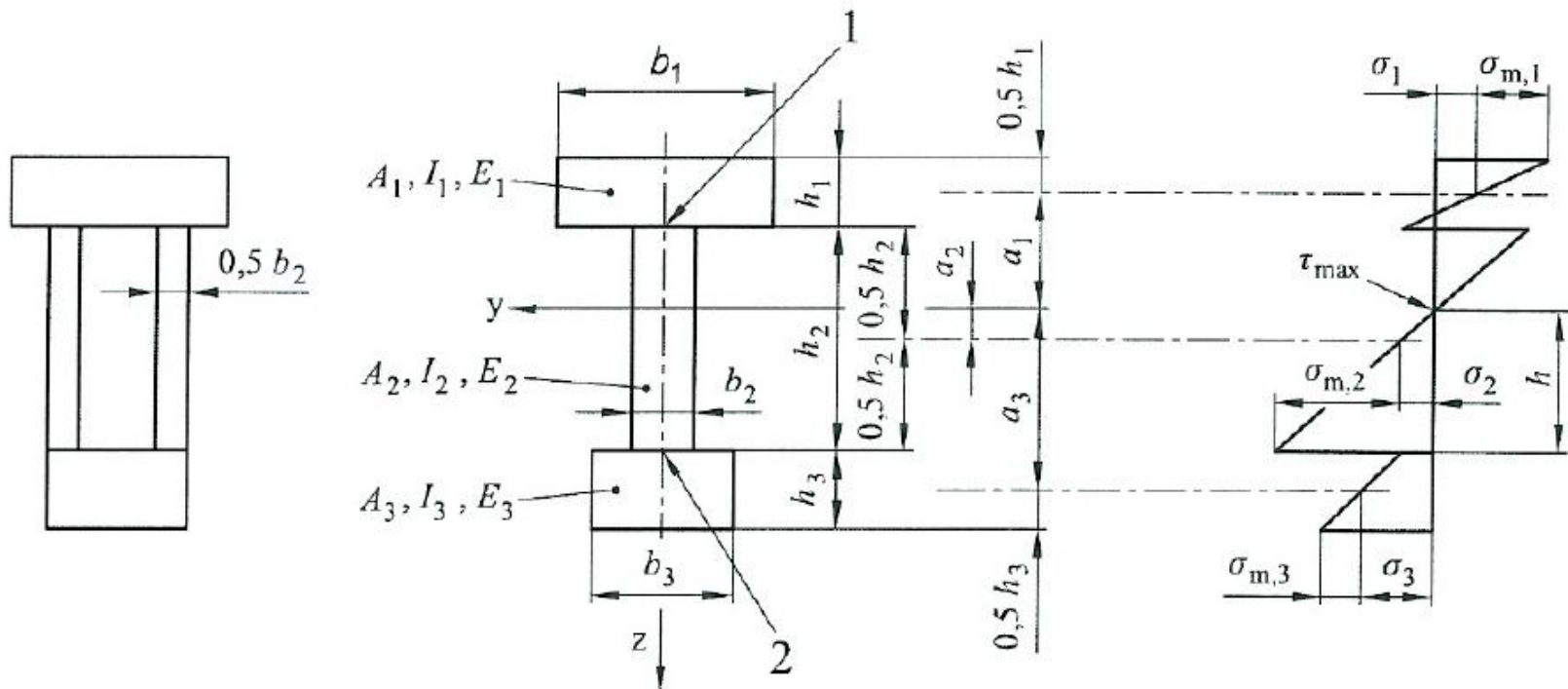
- (1) Il metodo di progettazione è basato sulla teoria dell'elasticità lineare e sulle seguenti ipotesi:
  - le travi sono semplicemente appoggiate con luce  $l$ . Per le travi continue le espressioni possono essere utilizzate adottando  $l$  uguale a 0,8 volte la luce pertinente, e per le travi a mensola adottando  $l$  uguale al doppio della lunghezza dello sbalzo;
  - le singole parti (di legno, di pannelli a base di legno) sono monolitiche oppure realizzate con giunti di estremità incollati;
  - le singole parti sono reciprocamente collegate tramite mezzi di unione meccanici aventi modulo di scorrimento  $K$ ;
  - la spaziatura  $s$  fra i mezzi di unione è costante oppure varia uniformemente secondo la forza di taglio tra  $s_{\min}$  e  $s_{\max}$ , con  $s_{\max} \leq 4 s_{\min}$ ;
  - il carico agisce in direzione  $z$ , dando origine a un momento  $M = M(x)$  che varia sinusoidalmente oppure parabolicamente, nonché a una forza di taglio  $V = V(x)$ .

### Interassi

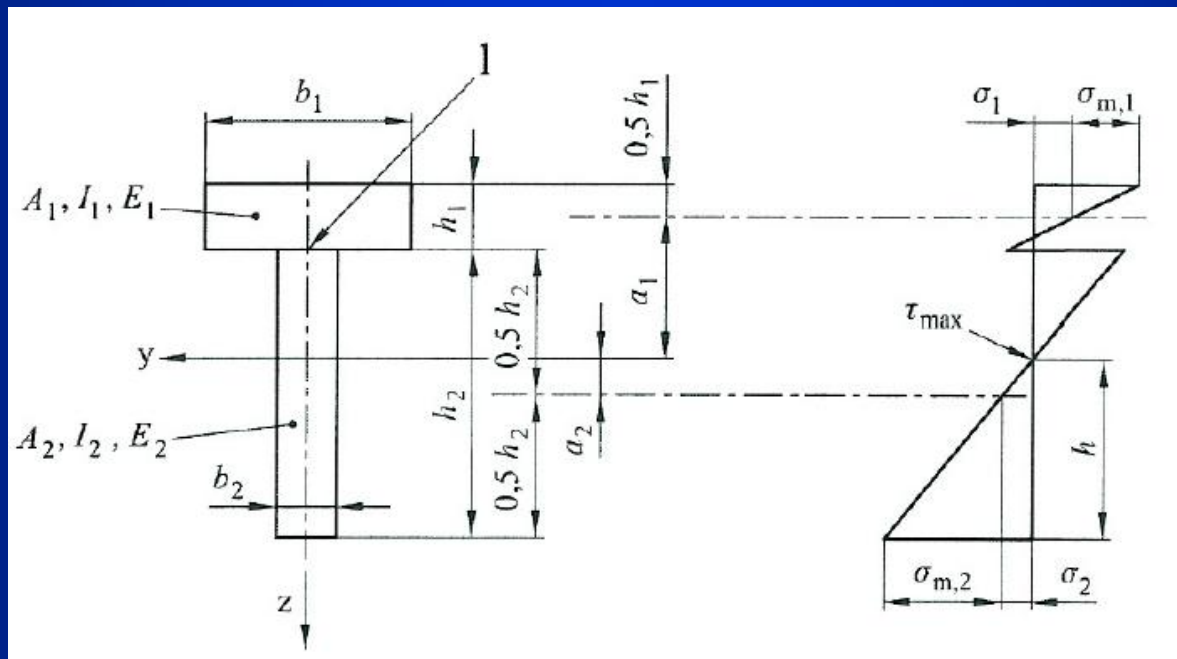
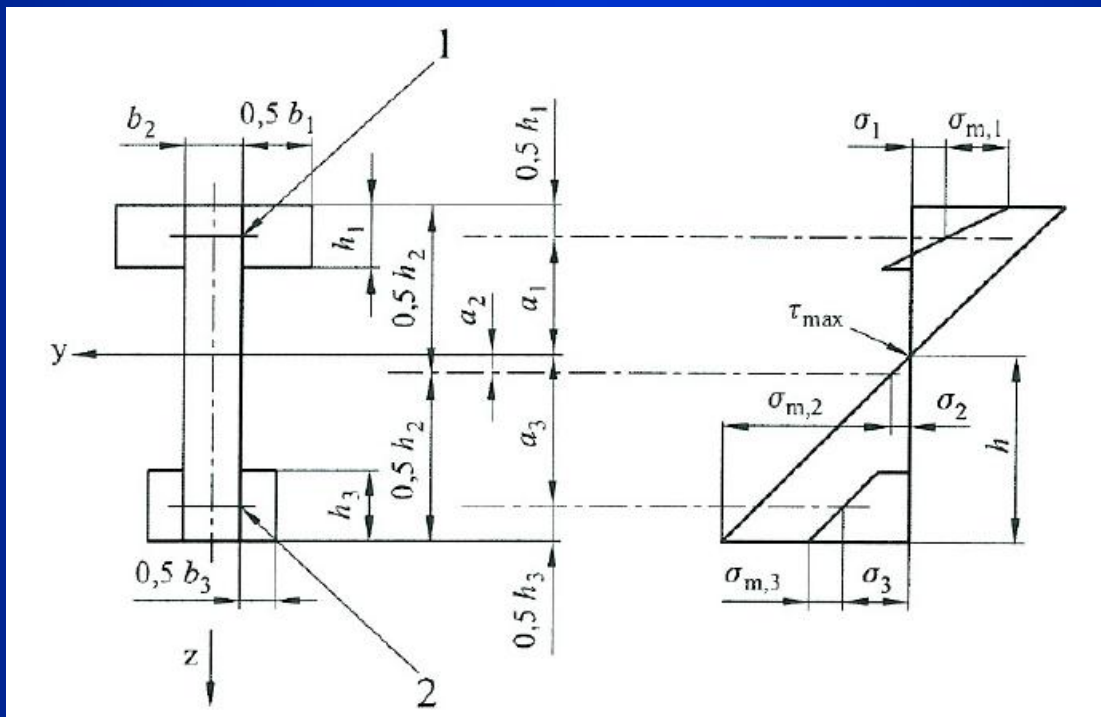
- (1) Nel caso in cui un'ala consiste di due parti unite a un'anima, oppure in cui un'anima consiste di due parti (come in una trave a cassetta, o scatolata), la spaziatura  $s_i$  è determinata dalla somma dei mezzi di unione per unità di lunghezza nei due piani di connessione.

### Frecce derivanti dai momenti flettenti

- (1) Le frecce sono calcolate utilizzando una rigidezza a flessione efficace  $(EI)_{\text{ef}}$  determinata in conformità al punto B.2.







## Rigidezza a flessione efficace

(1) Si raccomanda che la rigidezza efficace a flessione sia assunta come:

$$(EI)_{ef} = \sum_{i=1}^3 (E_i I_i + \gamma_i E_i A_i a_i^2)$$

utilizzando valori medi di  $E$  e in cui:

$$A_i = b_i h_i$$

$$I_i = \frac{b_i h_i^3}{12}$$

$$\gamma_2 = 1$$

$$\gamma_i = [1 + \pi^2 E_i A_i s_i / (K_i I_i^2)]^{-1} \quad \text{per } i = 1 \text{ e } i = 3$$

$$a_2 = \frac{\gamma_1 E_1 A_1 (h_1 + h_2) - \gamma_3 E_3 A_3 (h_2 + h_3)}{2 \sum_{i=1}^3 \gamma_i E_i A_i}$$

dove i simboli sono definiti in figura B.1;

$K_i = K_{ser,i}$  per calcoli allo stato limite di esercizio;

$K_i = K_{u,i}$  per calcoli allo stato limite ultimo.

Per sezioni a T  $h_3 = 0$

## Tensioni normali

(1) Si raccomanda che le tensioni normali siano assunte come:

$$\sigma_i = \frac{\gamma_i E_i a_i M}{(EI)_{ef}}$$

$$\sigma_{m,i} = \frac{0,5 E_i h_i M}{(EI)_{ef}}$$

## Tensione massima a taglio

- (1) Le massime tensioni di taglio si verificano dove le tensioni normali sono uguali a zero. Si raccomanda che le massime tensioni di taglio nell'anima (parte 2 in figura B.1) siano assunte come:

$$\tau_{2,\max} = \frac{\gamma_3 E_3 A_3 a_3 + 0,5 E_2 b_2 h_2^2}{b_2 (EI)_{\text{ef}}} V \quad (\text{B.9})$$

## Carico sul mezzo di unione

- (1) Si raccomanda che il carico sul mezzo di unione sia assunto come:

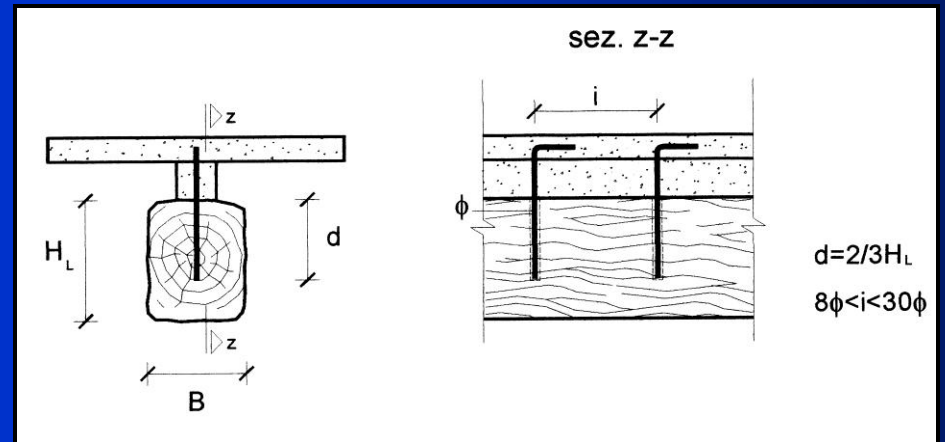
$$F_i = \frac{\gamma_i E_i A_i a_i s_i}{(EI)_{\text{ef}}} V \quad (\text{B.10})$$

dove:

$i = 1$  e  $3$ , rispettivamente;

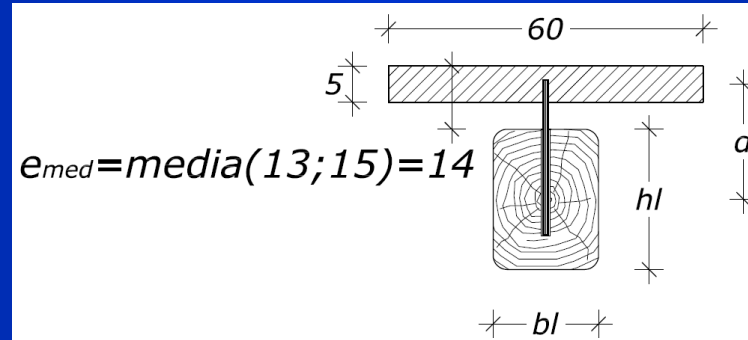
$s_i = s_i(x)$  è la spaziatura dei mezzi di unione come definita nel punto B.1.3(1).

-Per fare alcune considerazioni sull'espressione di  $f_{max}$ , riferiamoci per esempio al caso che approfondiremo in seguito, delle travi in legno con soletta superiore collaborante. Soletta e trave in legno sono collegate da "pioli" in acciaio realizzati con barre da C.A., sagomate ed inserite con resina epossidica nella trave in legno sottostante.





## Riferiamoci ad una sezione tipo:



$$l = 500 \text{ cm}$$

$$n^* = (E_c/E_l) = 3$$

-Se la connessione fosse infinitamente rigida, (caso C)  $f_{\max}$  potrebbe essere ottenuto dalla trattazione di Jourawsky.

$$f_{\max} = \overline{f}_{\max} = \frac{T_{\max} S^*}{J_{tot}^*}$$

$S^*$  = momento statico della parte resistente della sezione posta superiormente al contatto legno-calcestruzzo, calcolato rispetto al baricentro della sezione reagente.

$J_{tot}^*$  = momento d'inerzia dell'intera sezione reagente rispetto al baricentro.

-Altrimenti se la connessione è deformabile,  $f_{\max}$  è ricavabile dalla relazione precedente.

<u>CASO 1</u>
$b_l=h_l= 20\text{cm}$
$Y^*_G= 9,11 \text{ cm}$
$S^*= 5949 \text{ cm}^3$
$J^*_{\text{tot}}= 143216 \text{ cm}^4$
$\bar{f}_{\max}=0,04T_{\max}$
$f_{\max}=0,03T_{\max}$

<u>CASO 2</u>
$b_l=h_l= 30\text{cm}$
$Y^*_G= 15,75 \text{ cm}$
$S^*= 11925 \text{ cm}^3$
$J^*_{\text{tot}}= 385400 \text{ cm}^4$
$\bar{f}_{\max}=0,03T_{\max}$
$f_{\max}=0,019T_{\max}$

<u>CASO 3</u>
$b_l=h_l= 40\text{cm}$
$Y^*_G= 22,66 \text{ cm}$
$S^*= 19644 \text{ cm}^3$
$J^*_{\text{tot}}= 787000 \text{ cm}^4$
$\bar{f}_{\max}=0,026T_{\max}$
$f_{\max}=0,0011T_{\max}$

Per valutare  $f_{\max}$  con connessione deformabile, è stata assunta una rigidezza specifica  $K$  pari a  $900 \text{ kg/cm}^2$  valore medio fra quello di una connessione  $1\phi 12/10$  ( $k=960 \text{ kg/cm}^2$ ) e quello di una connessione  $1\phi 20/20$  ( $k=800 \text{ kg/cm}^2$ ). Vedremo successivamente come calcolare tale rigidezza.

- Appare chiara l'influenza della deformabilità della connessione  $f_{\max} < \bar{f}_{\max}$ .
- La rigidezza della connessione tuttavia non è "ingegneristicamente" trascurabile  $f_{\max} > (\bar{f}_{\max}/10)$
- Sia  $\bar{f}_{\max}$  che  $f_{\max}$  diminuiscono ovviamente con l'aumentare della sezione della trave in legno  $\longrightarrow$  Struttura più rigida  $\longrightarrow$  Minori scorrimenti
- L'azione nel connettore più sollecitato  $F_{\max} = f_{\max} i$ . Posto  $i_{\text{medio}} = 15\text{cm}$  risulta:

### CASO 1

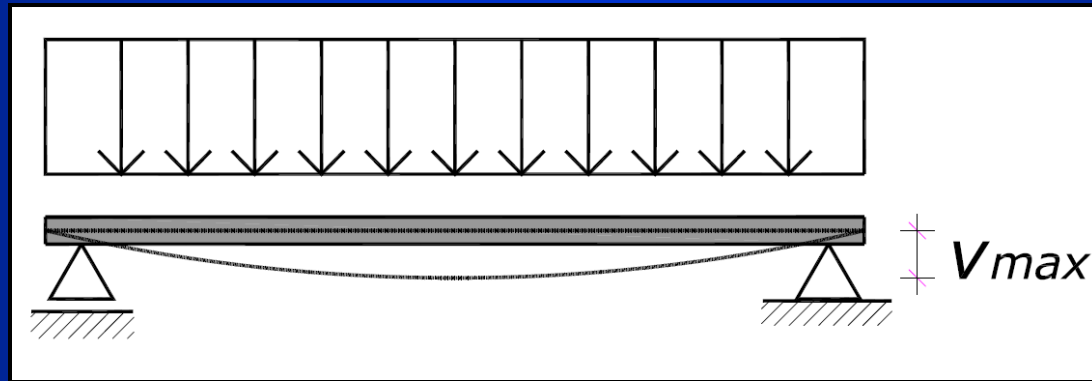
$$F_{\max} = 45\% T_{\max}$$

### CASO 3

$$F_{\max} = 16,5\% T_{\max}$$



# Come si può determinare la deformabilità di una trave composta?



Per il caso C) è molto semplice.  
Per esempio per il carico  
uniforme abbiamo:

$$v_{\max C} = \frac{5q_{tot}l^4}{384EJ_{tot}^*}$$

Per il caso A) di nuovo è molto  
semplice:

$$v_{\max A} = \frac{5q_{tot}l^4}{384(E_1J_1 + E_2J_2)}$$

Per il caso B) sempre seguendo la trattazione riportata in *Mangoni* “Nuovi sviluppi nel calcolo delle travi composte legno-calcestruzzo” (Bollettino Ingegneri n°7/8 2000) risulta con buona approssimazione:

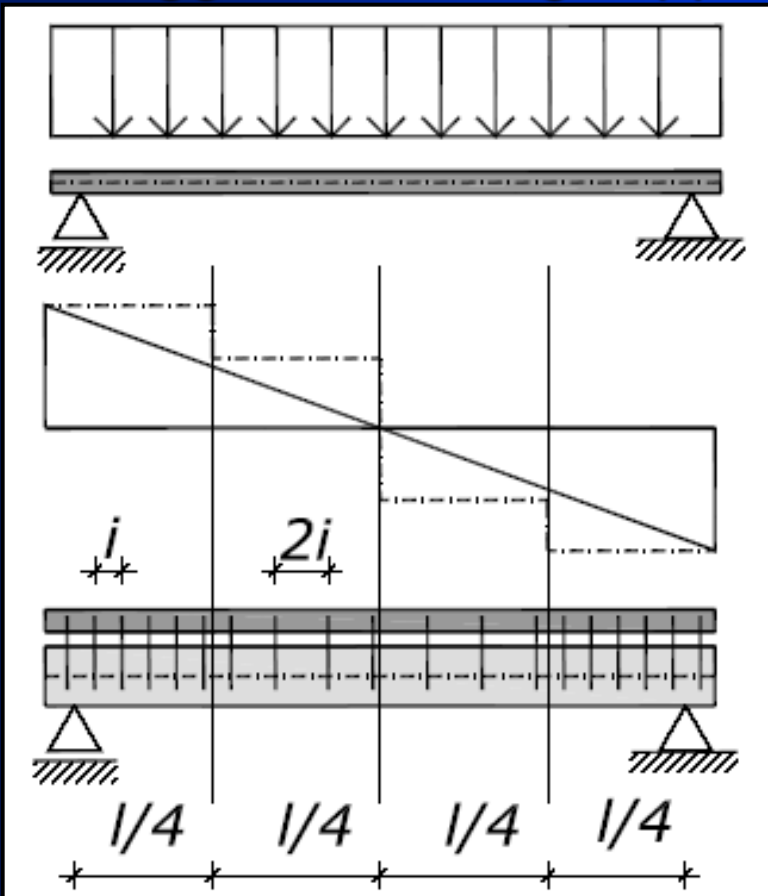
$$v_{\max B} \cong \frac{4ql^4}{\pi^5 EJ_{tot}} \left( 1 - \frac{d_G l / EJ_{tot}}{\pi \left( (E_1 A_1)^{-1} + (E_2 A_2)^{-1} + \frac{d_G^2}{EJ_{tot}} + \frac{\pi^2}{l^2 k} \right)} \right)$$

Le relazioni precedenti devono essere valutate ovviamente in relazione agli effetti viscosi dei diversi materiali.

# I connettori come vengono disposti lungo la trave?

I connettori devono contrastare lo scorrimento fra le due parti, quindi saranno più fitti dove gli scorrimenti sono maggiori.

Per altro essendo  $f_{\max}$  proporzionale al taglio è chiaro anche da questo punto di vista che i connettori saranno più fitti dove il taglio è maggiore, cioè agli appoggi.



—— Taglio sollecitante

- - - - Taglio resistente

Distribuzione tipica dei connettori

Al contrario delle travi metalliche composte (dove i connettori sono disposti anche in modo uniforme, fidando sul comportamento duttile dell'acciaio, quindi nel



fatto che mano a mano che la trave inferiore si indebolisce ed entra in campo plastico, il

carico tende a migrare verso la soletta, si hanno scorrimenti maggiori e quindi i connettori sono più sollecitati) nelle travi in legno il comportamento del materiale è più fragile, quindi conviene che i connettori siano non troppo deformabili avvicinandosi la trave in legno al collasso.